

5 Torsion

5.1 Allgemeines

Wenn ein Träger um die eigene Längsachse gedreht wird, wird er tordiert und erhält als Beanspruchung ein Torsionsmoment M_x . In *Bild 5.1* sieht man, wie Torsionsmomente entstehen, nämlich in dem Kräfte in z-Richtung F_z auf einem Hebelarm e_y oder Kräfte F_y auf einem Hebelarm e_z wirken. Der Hebelarm e_y bzw. e_z ist dabei der Abstand der Kraft F_z bzw. F_y vom Schubmittelpunkt.

In *Abschn. 4.4* wurde hergeleitet, dass Kräfte, deren Wirkungslinien nicht durch den Schubmittelpunkt gehen, Torsion erzeugen.

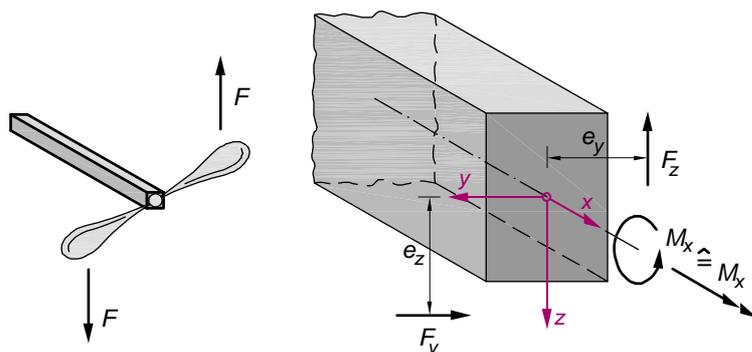


Bild 5.1 Torsionsmomente

Im linken Teil von *Bild 5.1* ist auch die anschauliche Wirkung des Torsionsmomentes dargestellt. Wird ein Propeller angetrieben, d.h. verdreht, erhält er Torsionsmomente. Kräfte in x-Richtung bewirken Biegemomente – niemals Torsionsmomente. Sie würden den Propeller verbiegen.

Die Berechnung der Spannungen infolge Torsion ist nicht einfach und von der Querschnittsform abhängig. Grundsätzlich werden Querschnitte in **wölbfreie** und **nichtwölbfreie** Querschnitte unterschieden. Um die Unterscheidung deutlich zu machen, soll ein Experiment durchgeführt werden.

Ein loses Blatt Papier – siehe *Bild 5.2* links – wird aufgerollt, in beide Hände genommen und gegenseitig verdreht. Nach dem Verdrehen sieht man, dass sich die Endquerschnitte verschoben haben. In *Bild 5.2* haben sie sich um das Maß u verschoben. Träger, deren Endquerschnitte nach der Beanspruchung nicht mehr eben sind, werden als nichtwölbfreie Querschnitte bezeichnet.

Torsionsmomente werden in der Literatur auch mit M_T bezeichnet.

Ein Torsionsmoment ist positiv, wenn der Momentenvektor – der Drehvektor – am linken Schnittufer (ist im rechten Teil von *Bild 5.1* dargestellt) in positive x-Richtung zeigt. Oder: Wenn man in Richtung der x-Achse schaut, muss sich das Moment im Uhrzeigersinn drehen.

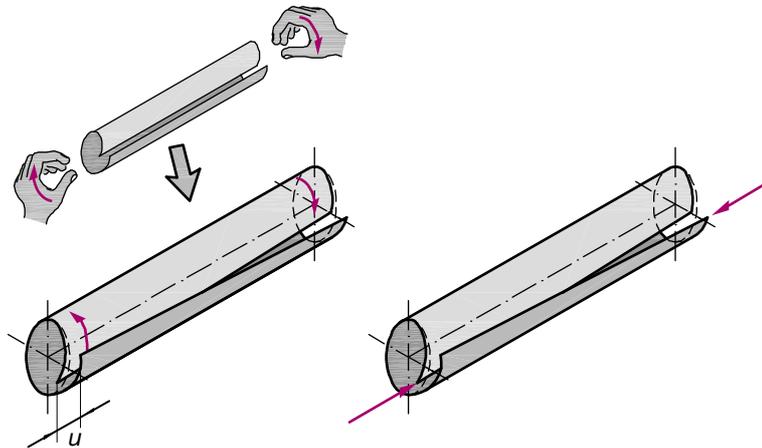


Bild 5.2 Experiment Papierrolle

Die St.-Venantsche Torsion wird nach Adhemar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797–1886) genannt, der als Ingenieur am Bau des Kanals von Nivernais und am Ardennenkanal mitarbeitete und bedeutende Arbeiten zur Festigkeitslehre veröffentlichte.

Torsion bei wölbfreien Querschnitten und bei Querschnitten, die sich ungehindert verschieben können, wird als reine oder **St.-Venantsche Torsion** bezeichnet. Bei St.-Venantscher Torsion werden die Torsionsmomente nur durch Schubspannungen τ abgetragen. Diese werden auch als primäre Schubspannungen bezeichnet. Die Berechnung dieser Schubspannungen wird in *Abschn. 5.2* gezeigt.

Das Experiment aus *Bild 5.2* soll erneut betrachtet werden. Nachdem die Papierrolle verdreht worden ist, entstand ein Versatz u des Endquerschnittes in Längsrichtung. Soll dieser Versatz, der auch als Verwölbung bezeichnet wird, wieder rückgängig gemacht werden, müssen Kräfte in Längsrichtung der Papierrolle aufgebracht werden (siehe *Bild 5.2* rechter Teil). Kräfte in Längsrichtung bewirken Normalkräfte und Biegemomente und damit Normalspannungen im betrachteten Träger. Da die Biegemomente meistens nicht konstant verlaufen, verursachen sie Querkräfte und damit auch Schubspannungen. Torsion an nichtwölbfreien Querschnitten, bei denen die Verwölbung der Endquerschnitte behindert wird, die sich also nicht verwölben können, wird als **Wölbkrafttorsion** bezeichnet. Bei Wölbkrafttorsion werden die Torsionsmomente neben St.-Venantscher Torsion durch Normalspannungen σ_x und Schubspannungen τ abgetragen, die auch sekundäre Schubspannungen genannt werden. Spannungen aus Wölbkrafttorsion sind sehr aufwändig zu berechnen. In *Abschn. 5.3* wird ein Näherungsverfahren gezeigt.

Die lose zusammengerollte Papierrolle ist, wie das Experiment gezeigt hat, ein nichtwölbfreier Querschnitt. Wodurch werden nun wölbfreie von nichtwölbfreien Querschnitten unterschieden? *Bild 5.3* zeigt eine Einteilung der Querschnitte.

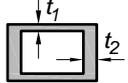
		wölbfrei	nicht wölbfrei
geschlossen	voll		 
	hohl	 	 
offen		  	  

Bild 5.3 Einteilung der Querschnitte

Wölbfrei sind Kreis-, Kreisringquerschnitte, quadratische Hohlquerschnitte mit konstanter Wanddicke sowie Querschnitte aus dünnwandigen Querschnittsteilen, deren Schwerelinien sich in einem Punkt treffen. Beliebige Hohlquerschnitte und beliebige Vollquerschnitte sind zwar nicht wölbfrei, weisen aber unter Torsionsbeanspruchung so geringe Verwölbungen auf, dass sie wie wölbfreie Querschnitte behandelt werden können. Offene dünnwandige Querschnitte (in Bild 5.3 unten rechts) sind nicht wölbfrei und müssen bei Behinderung der Endquerschnitte mit der Theorie der Wölbkrafttorsion berechnet werden. Die Behinderung der Verwölbung kann durch Einspannungen, andere Querschnitte, dicke Kopfplatten oder Ähnliches erfolgen.

Bevor Spannungen aus Torsionsmomenten berechnet werden, wird noch die Berechnung von Torsionsmomenten gezeigt.

In der Statik rechnen wir fast immer in ebenen Systemen. Fast alle baupraktischen Probleme lassen sich auf ebene Systeme reduzieren. Die Verteilungen von zusätzlichen Biegemomenten M_z und Torsionsmomenten M_x müssen an räumlichen Systemen ermittelt werden. Dafür muss geklärt werden, welches Auflager Torsionsmomente aufnehmen kann. Ein klassisches Auflager ist in Bild 5.4 dargestellt: die **Gabellagerung**. Eine Gabellagerung ist typisch für Hochbauträger, sie kann Vertikalkräfte in z -Richtung F_z , Horizontalkräfte in y -Richtung F_y und Torsionsmomente M_x aufnehmen. Die Torsionsmomente werden bei einer Gabellagerung als horizontales Kräftepaar (Kräfte F_y mit Hebelarm e_z) abgetragen. Die Gabellagerung ist ein Biegemomentengelenk, Biegemomente können nicht aufgenommen werden. Ein klassischer Einfeldträger, der an beiden Seiten infolge der Gelenke keine Biegemomente aufnehmen kann, muss als räumliches System mindestens auf einer Seite eine Gabellagerung besitzen, um

Die Papierrolle ist als offener dünnwandiger Kreisquerschnitt und damit als nicht wölbfreier Querschnitt einzuordnen.

Querschnitte aus Holz oder Stahlbeton sind meistens Vollquerschnitte. Im Stahlbetonbau sind auch Hohlquerschnitte möglich. Offene dünnwandige Querschnitte sind damit die Wölbkrafttorsion treten eigentlich nur im Stahlbau auf. So wird auch an den Hochschulen die Wölbkrafttorsion nicht in der Festigkeitslehre sondern im Fach Stahlbau gelehrt.

5

Wer nicht die Berechnung der Schnittgrößen an statisch bestimmten Systemen beherrscht, fahre mit *Abschn. 5.2* fort.

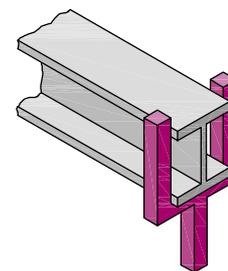


Bild 5.4 Gabellagerung

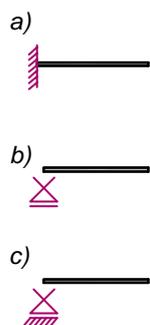


Bild 5.5 Auflagersymbole

nicht verschieblich zu sein. Eine weitere Möglichkeit, Torsionsmomente aufzunehmen, ist die Volleinspannung, sie nimmt alle Kräfte in allen drei Achsen F_x, F_y, F_z und alle Momente um alle drei Achsen M_x, M_y, M_z auf.

Für Träger, die eigentlich eben berechnet werden sollen (Schnittgrößen: N, M_y, V_z) und zusätzlich durch Torsionsmomente beansprucht werden, gibt es besondere Auflagersymbole, die in Bild 5.5 dargestellt sind. Diese Auflager können folgende Schnittgrößen aufnehmen:

- a) N, V_z, M_y, M_x
- b) V_z, M_x
- c) N, V_z, M_x

Wenn ein Einfeldträger an beiden Seiten Torsionsmomente aufnehmen kann, ist er statisch unbestimmt. Hier hilft die Querkraftanalogie, die Verteilung der Torsionsmomente zu bestimmen.

Die Verteilung der Torsionsmomente M_x verhält sich unter der Beanspruchung von Einzeltorsionsmomenten M_t oder Streckentorsionsmomenten m_t analog zu Verteilung der Querkraft V unter der Beanspruchung von Einzellasten P oder Streckenlasten q . Die einzelnen Verläufe sind in Bild 5.6 zu sehen.

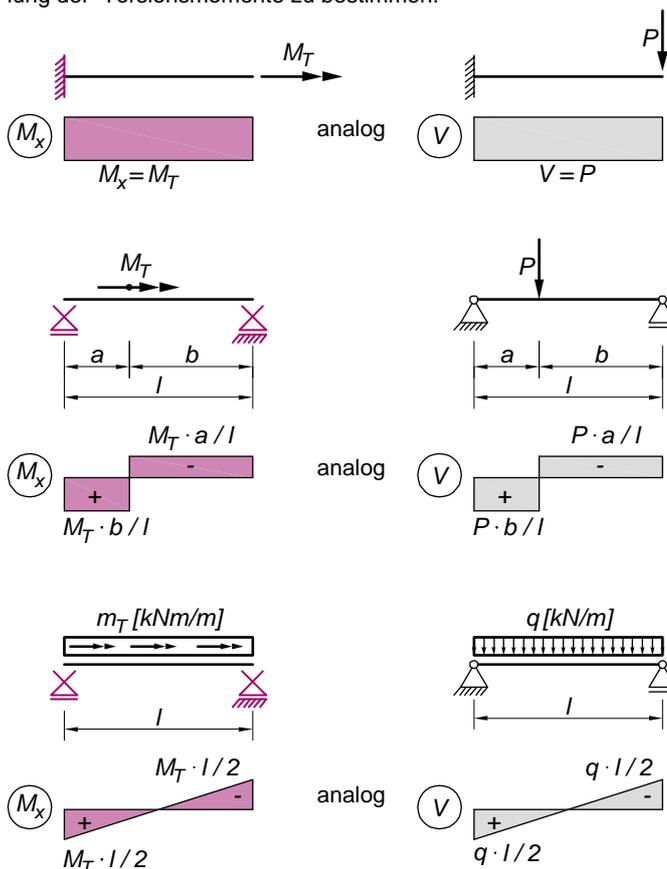


Bild 5.6 Querkraftanalogie

5.2 St.-Venantsche Torsion

Torsionsmomente werden bei wölbfreien Querschnitten, bei Querschnitten mit nur geringer Verwölbung (allgemeine Hohl- und Vollquerschnitte) und bei nichtwölbfreien Querschnitten (offene dünnwandige Profile), bei denen sich die Verwölbung ungehindert einstellen kann, durch St.-Venantsche Torsion abgetragen. In *Bild 5.7* wird ein Träger mit einem Vollkreisquerschnitt – einem wölbfreien Querschnitt – durch ein Torsionsmoment beansprucht.

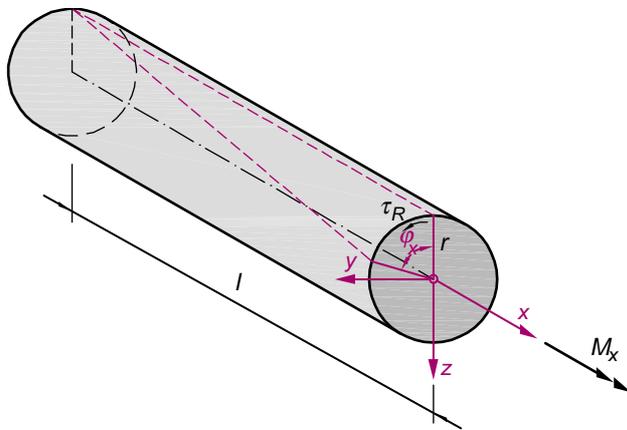


Bild 5.7 Kreisquerschnitt unter Torsionsbelastung

Die Formänderungen wachsen linear mit dem Abstand zur Drehachse. Da zwischen Verformungen und Spannungen ein linearer Zusammenhang besteht, wachsen auch die Spannungen (siehe *Bild 5.8*) linear an.

$$\tau(\rho) = \frac{\rho}{r} \cdot \tau_R \quad (5.1)$$

Die Schubspannungen verlaufen im Kreis, da die Integration der Schubspannungen wieder das Torsionsmoment M_x ergeben muss. Ein infinitesimales Kreisringelement nach *Bild 5.9* hat die Größe

$$dA = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho \quad (5.2)$$

Werden die Spannungen über den Kreisring integriert, entstehen Kräfte, die den Hebelarm ρ zum Schwerpunkt haben.

$$dM_x = \tau(\rho) \cdot dA \cdot \rho = \frac{\rho^2}{r} \cdot \tau_R \cdot dA \quad (5.3)$$

$$M_x = \int_0^r dM_x = \frac{\tau_R}{r} \cdot \int_0^r \rho^2 dA \quad (5.4)$$

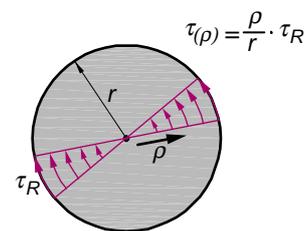


Bild 5.8 Schubspannungen im Kreisquerschnitt

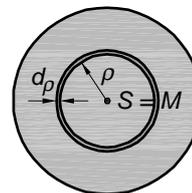


Bild 5.9 Integration der Schubspannungen

Dabei ist analog zum *Abschn. 2.2*

$$I_p = \int_0^r \rho^2 dA \quad (5.5)$$

das polare Trägheitsmoment. Beim Kreisquerschnitt ist

$$I_p = \int_0^r \rho^2 dA = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r \rho^3 d\rho = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r^4}{4} = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = I_y + I_z \quad (5.6)$$

Das polare Trägheitsmoment wird bei Torsionsbeanspruchung auch als **Torsionsträgheitsmoment** I_T bezeichnet. Im Weiteren wird nur noch I_T verwendet.

So ergibt sich für den **Kreisquerschnitt** die Schubspannungsverteilung

$$\tau(\rho) = \frac{M_x}{I_p} \cdot \rho = \frac{M_x}{I_T} \cdot \rho \quad (5.7)$$

mit der maximalen Schubspannung

$$\tau = \frac{M_x}{I_T} \cdot r \quad (5.8)$$

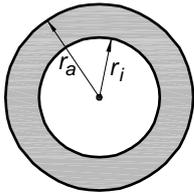


Bild 5.10 Dickwandiger Hohlquerschnitt

Für **dickwandige Hohlquerschnitte** nach *Bild 5.10* lautet I_T

$$I_T = \frac{\pi}{2} \cdot (r_a^4 - r_i^4) \quad (5.9)$$

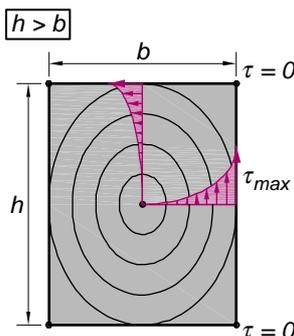


Bild 5.11 Strömungsanalogie

Für die maximale Schubspannung wird für dickwandige Hohlquerschnitte in *Gl. (5.8)* für den Radius r der Außenradius r_a eingesetzt.

Man kann sich einfach vorstellen, wie die Schubspannung infolge Torsion in einem Kreisquerschnitt verteilt ist. Schwieriger wird es bei Rechteckquerschnitten oder beliebigen Vollquerschnitten. Dazu helfen verschiedene Analogien.

Die **Strömungsanalogie** vergleicht die Torsionsspannungsverteilung mit einem Wasserstrudel. Im Strudel nach *Bild 5.11* sind am Rand die Strömungsgeschwindigkeiten und damit die Schubspannungen größer. In den Ecken gibt es keine Strömung und damit auch keine Schubspannung. An dünnen Querschnittsteilen ist der Strudel schneller als an breiten Teilen. Eine Analogie des Wasserflusses wurde bereits in *Kapitel 4* vorgestellt.

Die Strömungsanalogie wurde von Ludwig Prandtl (1875–1953) entwickelt.

Eine andere Analogie ist die **Seifenhautanalogie**. Über eine Öffnung in Form des untersuchten Querschnittes wird eine Membran – eine Seifenhaut – gespannt. Das Maß der Steigung der Seifenhaut ist ein Maß für die

Größe der Schubspannung. Wird die Seifenhaut wie in Bild 5.12 mit Höhenlinien versehen, so bedeutet eine dichtere Lage der Höhenlinien größere Schubspannungen. Maxima und Minima der Seifenhaut sind dann Nullpunkte der Schubspannungsverteilung.

Auch die **Seifenhautanalogie** wurde von Prandtl aufgestellt.

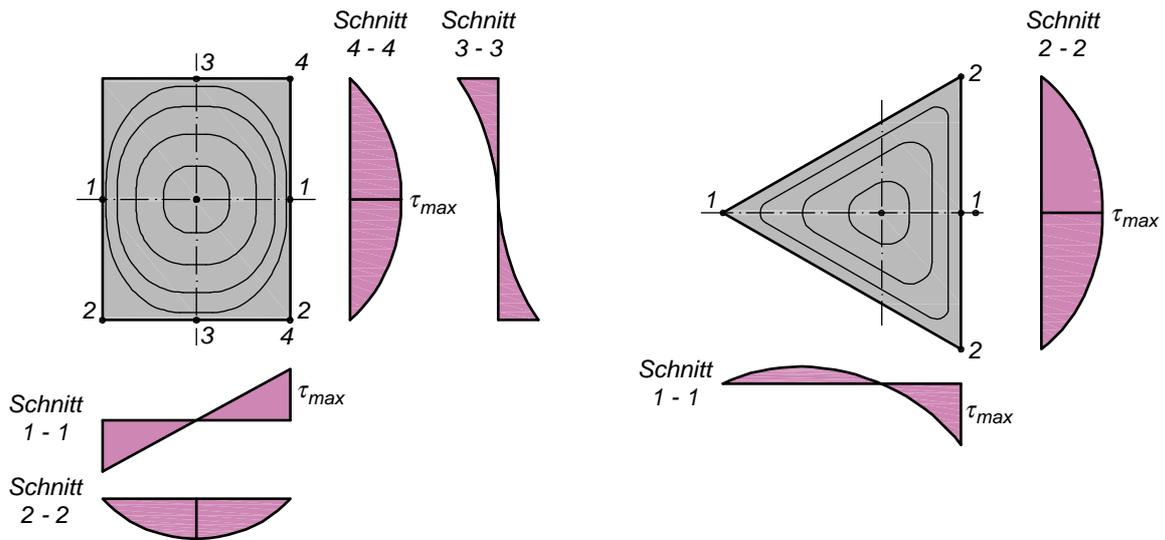


Bild 5.12 Seifenhautanalogie

In Bild 5.12 ist analog zu den Höhenlinien der Seifenhaut der qualitative Verlauf der Schubspannungen (ohne Richtungsangabe) angegeben. Aus den Analogien ist ersichtlich, dass bei einem Rechteckquerschnitt nach Bild 5.13 die maximale Schubspannung auf der längeren Seite auftritt. Für Rechtecke mit $b \leq h$ lassen sich die maximalen Schubspannungen in zwei Alternativen beschreiben.

$$\max \tau = \frac{M_x}{I_T} \cdot b \tag{5.10}$$

$$\max \tau = \frac{M_x}{W_T} \tag{5.11}$$

$$W_T = \eta_1 \cdot b^2 \cdot h \tag{5.12}$$

$$I_T = \eta_2 \cdot b^3 \cdot h \tag{5.13}$$

η_1 und η_2 sind vom Verhältnis des Seitenverhältnisses h/b abhängig in Tabelle 5.1 angegeben.

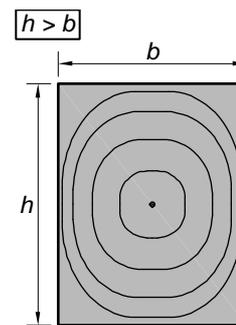


Bild 5.13 Rechteckquerschnitt

Das Torsionsträgheitsmoment I_T ist auf jeden Fall erforderlich, um die Verformungen aus der Torsionsverdrehung zu berechnen.

Tabelle 5.1 Beiwerte für die Torsionswiderstände eines Rechteckquerschnittes $b \leq h$

h/b	1	1,5	2	3	4	10	∞
η_1	0,208	0,231	0,246	0,267	0,281	0,313	0,333
η_2	0,140	0,196	0,229	0,263	0,281	0,313	0,333

Offene dünnwandige Profile sind meistens aus einzelnen dünnwandigen Rechtecken zusammengesetzt. Für ein dünnwandiges Profil nach *Bild 5.14* gilt

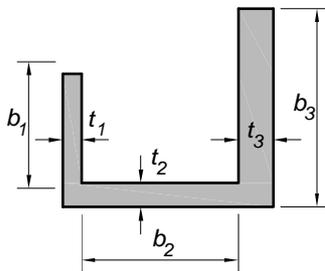
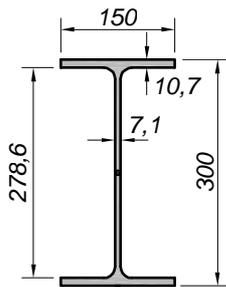
$$I_T = \frac{\eta}{3} \cdot (t_1^3 \cdot b_1 + t_2^3 \cdot b_2 + t_3^3 \cdot b_3 + \dots) = \frac{\eta}{3} \cdot \sum t_i \cdot b_i \quad (5.14)$$

Für η können für die typischsten Profile Schätzwerte angegeben werden.

- $\eta \approx 1,0$ für L-Profile
- $\eta \approx 1,15$ für große, geschweißte I-Profile
- $\eta \approx 1,30$ für gewalzte I-Profile

Die maximalen Schubspannungen in einem offenen dünnwandigen Profil gelten dann:

$$\max \tau = \frac{M_x}{I_T} \cdot \max t \quad (5.15)$$

**Bild 5.14** Offenes dünnwandiges Profil**Bild 5.15** Profil IPE 300 (Maße in mm)

Das Torsionsmoment in kNm muss in kNcm umgerechnet werden.

Beispiel 5.1

Für Stahlbauprofile sind in Nachschlagewerken wie [1] die Torsionsträgheitsmomente angegeben. In diesem Beispiel soll versucht werden, für das Profil IPE 300 nach *Bild 5.15* das Torsionsträgheitsmoment zu berechnen. Der IPE 300 ist ein gewalztes Profil, so ist $\eta \approx 1,30$.

Dann ist nach Gl. (5.14)

$$I_T = \frac{1,30}{3} \cdot (2 \cdot 1,07^3 \cdot 15 + 0,71^3 \cdot 27,86) = 20,24 \text{ cm}^4$$

In [1] wird als Torsionsträgheitsmoment $I_T = 20,1 \text{ cm}^4$ angegeben. Für ein Torsionsmoment $M_x = 2,0 \text{ kNm}$ lautet nach Gl. (5.15) die maximale Schubspannung

$$\tau = \frac{2,0 \cdot 100}{20,1} \cdot 1,07 = 10,6 \text{ kN/cm}^2$$